4.

«Теэтет»

Никола Лечич

О новом подходе к реконструкции лекции Феодора (Tht. 147d)

Nikola Lečić

Theodorus' Lesson (Tht. 147d): A New Approach to Reconstruction

Abstract. In *Theaetetus* (145a–148a), Plato brings up Theaetetus' retelling of a lesson by Theodo-rus of Cyrene, in which the latter demonstrated the incommensurability of the sides of squares containing three, five, and up to seventeen square feet with the side of one square foot. In this paper, we analyse modern scholarly attempts to reconstruct the exact content of the lesson. Our understanding of the fifth-century mathematics in general (and the early Pythagorean one in particular) may vary significantly depending on which methodology Theodorus actually used.
Keywords: Theodorus of Cyrene, Theaetetus, history of mathematics, arithmetics, geometry, incommensurability, Pythagoreans.

Отрывок из диалога «Теэтет», в котором Сократ и Теэтет беседуют о лекции Феодора из Кирены, является одним из самых интересных и важных мест для понимания ранней истории кон-

© Н.Д. Лечич (Москва). nikola.lecic@anthesphoria.net. Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

цепта несоизмеримости[1] и его доказательства[2]. Диалог гласит[3]:

> Tht. 145a *Сократ*: Не геометр ли он [= Феодор]? — *Теэтет*: Несомненно, Сократ. — Не знаток ли он также астрономии, искусства счета (λογιστικός), музыки и вообще всего, что касается образованности? — По-моему, да. (145c) *Сократ*: Скажи мне тогда: узнаёшь ли ты от Феодора нечто о геометрии? —*Теэтет*: Да. — *Сократ*: И о астрономии, гармонии, вычислениях тоже? — Стараюсь по крайней мере. <...> (147d) *Теэтет*: Присутствующий здесь Феодор чертил (ἔγραφε) нам что-то о квадратных корнях[4], показывая, что стороны квадратов, содержащих три (τρίποδος) и пять

[1] Под «несоизмеримостью» имеется в виду греческий термин ἀσυμμετρία (прилагательное ἀσύμμετρος). Первое четкое определение — которое, как мы увидим ниже, содержит следы своего зарождения в V в. — мы находим в X книге «Начал»: «Если для двух [заданных] неравных величин при постоянном попеременном вычитании (ἀνθυφαιρουμένου) меньшей из большей остающееся никогда не будет измерять своего предшествующего, то величины будут несоизмеримыми (ἀσύμμετρα)» (Euc. X, prop. 2; пер. МБВ 1949: 103). Это предложение связано с определением 1 из этой же книги: «Соизмеримыми величинами называются измеряемые одной и той же мерой, несоизмеримыми же — для которых общая мера не может быть образована» (Euc. X, def. 1; пер. МБВ 1949: 101).

[2] Под «доказательством» в данной статье не имеется в виду осознанное систематическое доказывание утверждений, которое впервые мы встречаем у Евклида. Когда мы говорим о «древнем доказательстве» (например, у Гиппаса) имеется в виду факт, что вопрос о несоизмеримости как таковой требовал совсем иной уровень рефлексии, нежели исследование конкретных случаев (ср. Knorr 1975: 4; van der Waerden 1961: 143). «Доказательство» в данном случае соприкасается с концептом наглядной демонстрации; суть в намерении, которое при этом проявляется.

[3] Pl. Tht. 145a–148a = DK 43 4; пер. Лебедев 1989: 431–432.

[4] Так περὶ δυνάμεων переводит А.В. Лебедев. Ср. Васильева 1993: 198: «Вот Феодор объяснял нам на чертежах нечто о сторонах квадрата». Английский перевод Г.Н. Фаулера (Fowler 1921: 25): «Theodorus here was drawing some figures for us in illustration of roots». Все эти переводы пользуются несуществующими в оригинале понятиями «корень» или «квадрат». У. Норр (Knorr 1975: 181) предлагает такой перевод: «Theodorus was proving for us via diagrams something about powers, in particular about the three-foot-power and the five-foot-power — demonstrating that these are not commensurable in length with the one-foot-power, — and selecting each power individually in this way up to the seventeen-foot-power; but in this one for some reason he encountered difficulty».

квадратных футов (πεντέποδος), несоизмеримы со стороной одного квадратного фута. Он выбирал один за другим квадраты вплоть до семнадцатифутового (ἑπτακαιδεκάποδος), а на нем остановился. И вот нам пришло на ум, поскольку число корней казалось бесконечным, попытаться объединить их все под одним именем, которым мы назовем все эти корни. — *Сократ*: Ну и как, нашли вы такое имя? — *Теэтет*: По-моему, нашли, но смотри сам. — *Сократ*: Говори. — *Теэтет*: Мы разделили все числа на два разряда. Те, которые способны получаться путем перемножения равных множителей, мы уподобили по фигуре квадрату и назвали их квадратными и равносторонними. — *Сократ*: Отлично. — *Теэтет*: А те, что находятся между ними, как, например, три, и (148d) пять, и всякое число, которое не может получится из умножения равного на равное, но либо большего на меньшее, либо меньшего на большее, так что на фигуре оно всегда заключено между неравных сторон, мы уподобили прямоугольной фигуре и назвали прямоугольным числом. — *Сократ*: Отлично. Но что потом? — *Теэтет*: Все линии, которые квадрируют плоско равностороннее число, — как потенции (δυνάμεις), поскольку они несоизмеримы с первыми по длине, но лишь по плоскости, которую они могут [~ обладают потенцией] [заключают в себе]. То же и об объемных фигурах.

Общепринятое мнение, что в области исследования несоизмеримости Феодор из Кирены[5] продолжил дело пифагорейца Гиппаса, который жил поколением раньше[6]. В науке пока нет обще-

[5] Феодор включен в «каталог пифагорейцев» Ямвлиха; имея в виду сомнительность этого источника, У. Буркерт — очевидно, не сомневаясь в «пифагорействе» Феодора — оставляет открытым вопрос о том, насколько оно повлияло на его математические умения (Burkert 1972: 403 n. 12, 421 n. 119, 451–452 n. 23). Пифагорейскую принадлежность Феодора принимает Жмудь 2012: 22, 51, 100, 114–115. Для самой реконструкции его лекции она, конечно, несущественна. Однако, поскольку в данной статье мы будем защищать «арифметический» вариант реконструкции, то у нас пифагореизм Феодора будет совпадать с фактом арифметической природы раннепифагорейской математики в V в. (см. Жмудь 2012: 243).

[6] Несмотря на то, что Гиппасу иногда приписывается первая демонстрация несоизмеримости с помощью пентаграммы (von Fritz 1945: 257; Heller 1958), более вероятно, что он это сделал с помощью диагоналей и стороной квадрата

принятого мнения насчет того, как именно выглядела лекция Феодора. Ее реконструкция на основе данного отрывка важна, поскольку более ранних свидетельств такого объема, однозначно относящихся к данной проблеме, нет. В зависимости от того, какой методологией пользовался Феодор, во многом зависит и реконструкция самого раннего занятия проблемой несоизмеримости (наверное, связанного с Гиппасом), а также и то, какие продвижения в данной теме сделал Теэтет, приблизив предмет к тому состоянию, которое находим в «Началах» Евклида.

Исследователю необходимо разобраться с тремя вопросами: (1) пользовался ли Феодор геометрическими или арифметическими[7] средствами? (2) почему Феодор остановился именно на

(ср. Жмудь 2012: 236 прим. 128; van der Waerden 1961: 107). В качестве классического описания современным языком этого открытия и разработки Феодора можно позаимствовать пример у Жмудя: «Поскольку Феодор доказал иррациональность величин от $\sqrt{3}$ до $\sqrt{17}$, то к Гиппасу обычно относят открытие иррациональности $\sqrt{2}$, классический пример которой — несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной» (Жмудь 2012: 239). В связи с отсутствием в рассказе квадрата «из двух квадратных футов» логично предположить, что этот факт («иррациональность $\sqrt{2}$») тогда был известен: ср. Burkert 1972: 463.

[7] Под арифметикой здесь подразумевается широко признанная в науке гипотетическая конструкция под названием «псефическая арифметика», т.е. «арифметика камешков» («dot-arithmetics», «pebble-arithmetics»). В этой арифметике числа были представлены с помощью двухмерного построения камешков (*псефов* — ψῆφοι). «Псефическая арифметика» сконструирована в трудах Бернета и Беккера: Burnet 1948: 99–107; Becker 1936: 538. Текстуальной основой для ее существования считаются фрагмент Эпихарма (DK 23 B 2; см. Knorr 1975: 137), описание гномона из «Физики» (Arist. Ph. 203a8–13; см. Жмудь 2012: 244; Knorr 1975: 155; von Fritz 1945: 252), а также свидетельство Архита (DK 47 B 4; дискуссию о подлинности см. Burkert 1972: 220–1 n. 14; Huffman 2005: 225–6). Предполагаемым ядром этой арифметики была теория четного и нечетного; оно сохранилось в некоторых определениях Евклида (Euc. VII, def. 6, 7) и засвидетельствовано у Аристоксена в единственном сохранившемся отрывке из его труда «Об арифметике» (Aristox. fr. 23 = DK 58 B 2; о фрагменте см. Burnet 1948: 288–9; van der Waerden 1961: 108 ff.; Philip 1966: 103, 203; Burkert 1972: 33 n. 27; Жмудь 2012: 226, 226–7 прим. 80). В настоящий момент встречается серьезная критика идеи «псефической арифметики» (Netz 2014: 178–9, 183, 179 n. 36).

17?[8]; (3) «Стороны квадратов… несоизмеримы со стороной одного квадратного фута» — это трактовка Теэтетом результатов, которых добился Феодор, или слова самого Феодора? В данной статье мы постараемся проанализировать существенно отличающиеся друг от друга современные подходы к лекции Феодора, которые в принципе суммируют все результаты и идеи, выдвинутые в этой области до сих пор. Акцент будет сделан на самой новой реконструкции, предложенной Лучичем в 2015 г.

Элементы геометрической реконструкции, на которую намекает фраза «изображение квадратов», мы находим у Норра[9]. В этой интерпретации Феодор рисовал прямоугольные треугольники с катетами $\sqrt{N}$ и $(N-1)/2$ и гипотенузой $(N+1)/2$[10]. Согласно Норру, Феодор мог демонстрировать своей аудитории корни нечетных и четных величин следующим образом: «Если число N нечетное, то сторона квадрата из N единиц площади строится как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $(N+1)/2$ линейных единиц и чей второй катет равен $(N-1)/2$ единиц… Если число N четное, $\sqrt{N}$ строится как половина катета прямоугольного треугольника с гипотенузой $N+1$, чей второй катет равен $N-1$»[11].

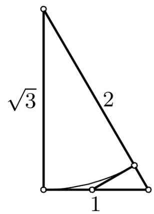

Рис. 1: Геометрический подход к случаю $\sqrt{3}$: бесконечное повторение геометрического процесса (Lučić 2015b: 11.6).

[8] Удовлетворительный ответ должен показать, почему 17 представляет препятствие, естественно происходящее из средств, которыми располагали во времена до Феодора, ср. Lučić 2015b: 12.5. В литературе встречается идея, что Феодор остановился по причине ограниченного времени лекции, ср. Knorr 1975: 193.

[9] Knorr 1975: 62–108, 170–210.

[10] Knorr 1975: 182.

[11] Knorr 1975: 181–2.

Когда мы вслед за Теэтетом делаем *вывод* о несоизмеримости, тогда наши рассуждения переходят в область арифметики. Как предполагал Норр, «говорить, что корень и единица (unit) состоят в отношении $A:B$, означает, что существует некая меньшая длина, которой можно измерить корень A раз, а [саму] единицу B раз». Например, если надо продемонстрировать несоизмеримость квадрата с поверхностью 3 и его диагональю, то рисуется треугольник с катетами $\sqrt{3}$ и 1 и гипотенузой 2 (рис. 1). Принимая меньшую длину в качестве новой единицы, данная конструкция превращается в «числовой» треугольник с катетами A и B и гипотенузой $2B$. «Имея в виду ‘числовой’ характер метрической геометрии, которая стояла за действиями Феодора, такое превращение, вероятно, могло подразумеваться в тот исторический период»[12].

Если это действительно было так, логично предположить, что древнее доказательство эпохи Гиппаса, которое развивал Феодор, тоже имело схожую геометрическую форму[13]. В нем появляется бесконечное повторение одного и того же геометрического процесса попеременного вычитания, и с его помощью показывается, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы (т.е., что стороной невозможно измерить диагональ). Классическое изображение этого процесса представлено на рис. 2.

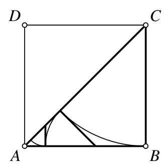

Рис. 2: Геометрическая демонстрация несоизмеримости $\sqrt{2}$ с помощью диагоналей и стороны квадрата.

[12] Knorr 1975: 183–4, 206–7 n. 31.

[13] Lučić 2015a: 27.

Однако геометрическая природа древней демонстрации несоизмеримости ставится под вопрос в одной из новейших трудов на данную тему[14] по двум причинам.

Первая — визуальная очевидность (наглядность), главный элемент математики раннего периода, в предполагаемых геометрических конструкциях, показывающих процесс попеременного вычитания, который никогда не заканчивается, отсутствует; наглядность *несопоставима с незаконченным.* Лучич делает важное замечание о том, что даже Евклид, почти через два века после Гиппаса, не пользуется таким приемом ни в каких целях. Евклид описал процесс, представленный на рис. 2, в процитированном нами выше определении X.2 и дал геометрическое доказательство. Однако, несмотря на кажущуюся важность и полезность, он этим результатом *нигде* в «Началах» не пользуется. В связи с этим в своей недавней работе Лучич выдвигает тезис о том, что предложение VIII.14 на самом деле является доказательством Евклида теоремы Теэтета, о которой речь шла в платоновском «Теэтете». Предложение VIII.14 гласит:

> Если квадрат измеряет квадрат, то и сторона измерит сторону; и если сторона измеряет сторону, то и квадрат измерит квадрат[15].

Доказательство этого предложения *не геометрическое*[16]. Если Лучич прав, тогда VIII.14, пожалуй, содержит свидетельство о том, что́ представляли собой первые попытки выйти за рамки псефической арифметики. Поскольку геометрическое доказательство Евклид дает, но нигде им не пользуется, при этом доказательство предложения, похожего на описание лекции Феодора, у него арифметическое, предложение X.2 не имеет связи с Феодором, и идею о геометрическом характере его лекции следует отбросить[17].

---

[14] Lučić 2015a: 27, 30. В своей реконструкции Лучич пользуется свидетельствами и идеями, известными по отдельности в литературе, но нигде раньше не использованными в совокупности.

[15] Euc. VIII, prop. 14; пер. МБВ 1949: 57.

[16] Lučić 2015a: 27.

[17] Lučić 2015b: 2.8.

Вторая причина, по которой геометрическое доказательство маловероятно, — легкость обобщения. Его настолько легко обобщить, что у Феодора, если он действительно пользовался конструкциями, предложенными Норром, не было бы никаких причин останавливаться на 17. Более того, случай с 17 не только не должен становиться препятствием, но он тривиален и намного легче примера с 3. Для доказательства несоизмеримости стороны семнадцатифутового квадрата со стороной однофутового достаточно нарисовать треугольник со сторонами 1 и 4 и применить бесконечное повторение, о котором, как предполагают сторонники геометрической версии, знал еще Гиппас[18].

Из всего этого делается вывод о практическом отсутствии вероятности использования Феодором геометрического доказательства[19].

Теперь следует рассмотреть то, как обстоит дело с возможными реконструкциями не-геометрического доказательства, насколько они убедительны (т.е. как отвечают на три заданных нами вопроса об отрывке из «Теэтета»), каково их текстуальное подтверждение, а также — стоит ли в этом случае задуматься и о возможной арифметической природе древней демонстрации несоизмеримости времен Гиппаса.

Лучич пишет, что самый ранний намек на не-геометрическую природу демонстрации несоизмеримости мы находим в «Первой

---

[18] Есть идея, что «остановился на 17» означает, что 17 было не препятствием, а последним успешным случаем; Феодор, как утверждают, на самом деле остановился на 19 (Conway, Shipman 2013: 5). Однако и пример с 19 не сложен (катеты 9 и $\sqrt{19}$, гипотенуза 10). В то же время 19 может быть препятствием, если подразумевать, что все треугольники должны иметь один-единственный катет; 19 невозможно доказать с помощью такого треугольника: Lučić 2015a: 27; Conway, Shipman 2013: 3. Предположение, что Феодор умел пользоваться только треугольниками с единичным катетом, означало бы, что он плохой математик, что́ звучит довольно неубедительно.

[19] Lučić 2015a: 27.

аналитике» Аристотеля, где он описывает «доказательства через невозможное»[20]:

> А что посредством этих же фигур ведутся также доказательства через невозможное, умозаключают к ложному, а первоначально принятое они доказывают, исходя из предположения, когда из признания того, что противоречит [первоначальному принятому], вытекает нечто невозможное; например, несоизмеримость диагонали [со стороной квадрата] доказывают тем, что если признать их соизмеримость, то нечетное окажется равным четному. Таким образом, то, что нечетное оказывается равным четному, выводится на основании умозаключения, а что диагональ несоизмерима [со стороной квадрата], доказывается исходя из предположения, так как из признания того, что противоречит [первоначально принятому], получается ложное, ведь умозаключать через невозможное, как было сказано, — значит доказывать нечто невозможное посредством первоначально допущенного предположения[21].

Это описание в литературе связывается с реконструкцией раннего доказательства несоизмеримости, которая называется «традиционным доказательством с помощью четного и нечетного» («traditional even-odd proof»)[22]. В разработанном виде и в современной записи оно выглядит так: если $\sqrt{2} = p / q$, где p и q — это взаимно простые числа, тогда $p^2 = 2q^2$. Квадрат нечетного числа — это тоже нечетное число, и это означает, что p четное число, например $p = 2r$. Далее, это означает, что $4r^2 = 2q^2$, т.е. $q^2 = 2r^2$. Отсюда следует, что $\sqrt{2} = q / r$. Однако мы предположили, что p и q взаимно простые числа, т.е. что p / q несократимо. Получается противоречие («доказательство через невозможное», как говорит Аристотель); значит, нет таких p и q, при которых $\sqrt{2} = p / q$ [23].

[20] Похожий текст раньше считался дополнением к десятой книге «Начал» (X.117: Heath 1956: 3.2). Но он едва ли принадлежит Евклиду; нет его и в русском переводе Д.Д. Мордухай-Болтовского (под ред. И.Н. Веселовского: МБВ 1949).

[21] Arist. APr. 41a23–32; пер. Фохт 1978: 167–168.

[22] Ср. описание у Конвея и Шипмана (Conway, Shipman 2013: 4).

[23] Conway, Shipman 2013: 2.

Проблема с этим доказательством состоит в том, что помимо текстуально подтвержденной арифметики четного и нечетного оно требует знаний концепта взаимно простых чисел, что кажется достаточно сложным для первооткрывателя в начале V века.

Конвей и Шипман считают, что есть еще одно исторически и математически возможное доказательство, которое пользуется дихотомией «четное-нечетное» на еще более примитивном уровне. Это «доказательство через единственную факторизацию» («unique factorization proof»)[24]. Оно очень короткое: если $q^2 = 2p^2$, тогда факторизация q^2 содержит четное число факторов равных двойке, в два раза больше, чем факторизация числа q, поскольку факторизация $2p^2$ очевидно содержит нечетное число двоек (на парное число двоек добавляем еще одну). Однако разные факторизации обязательно состоят из разного количества элементов. Поэтому q^2 не может быть равно $2p^2$, и квадратный корень из 2 — это «не рациональное число»[25].

Однако, как отмечает Лучич, несмотря на то, что это доказательство основано на арифметике четного и нечетного, ключевой аргумент доказательства взят не из псефической арифметики: понять единственную факторизацию невозможно с помощью двухмерного упорядочивания камешков. В «Началах» есть описание факторизации — предложение XI.14:

> Если число будет наименьшим измеряемым <данными> первыми числами, то оно не измерится никаким иным первым числом, кроме первоначально измерявших <его>[26].

Понимание того, о чем говорит Евклид в доказательстве этого предложения, подразумевало бы упорядочивание камешков в более чем двух измерениях[27].

Конечно, можно предположить, что идеей о единственной факторизации пользовались без доказательства. Но даже в таком

[24] Conway, Shipman 2013: 5.

[25] Lučić 2015a: 28–9.

[26] Euc. IX, prop. 14; пер. МБВ 1949: 83.

[27] Lučić 2015b: 12.1.

случае, отмечает Лучич, эта реконструкция страдает от того же недостатка, что и геометрическая: ее очень легко обобщить. Поэтому крайне трудно представить, что Феодор об этой легкости обобщения не знал; в этом случае у него опять-таки не было бы причин останавливаться на 17.

Однако у нас есть еще одно ценное свидетельство, которое, возможно, скрывает ключ к реконструкции методологии древней демонстрации несоизмеримости. Это — «Менон»[28]. В известном эпизоде, когда Сократ с помощью раба доказывает, что знание — это припоминание, находится возможное ядро демонстрации несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны, и оно — арифметическое[29]. Суть в том, что идея эта скрыта за другим вопросом: в каком отношении находятся сторона данного квадрата и квадрата, площадь которого в два раза больше? А уже этот вопрос скрывается за еще более простым и древним: как построить квадрат в два раза больше, чем данный?

В «Меноне» раб с помощью Сократа показывает, что квадрат, который в два раза больше по площади, *можно построить*, но что невозможно *найти* такой квадрат со стороной, длина которой состоит из целого числа единиц (т.е. чтобы эта сторона была соизмерима со стороной, длина которой 1).

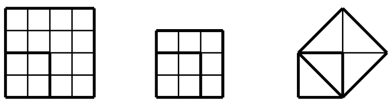

Рис. 3: Размышления раба Менона (Lučić 2015b: 12.3).

[28] Lučić 2015a: 28–9. Норр (Knorr 1975: 26) опирается на «Менона» для реконструкции того, «как могло выглядеть пифагорейское доказательство, очищенное от анахронизмов». Однако Норр, пользуясь идеей из «Менона», показывает лишь геометрическую интерпретацию доказательства через четное и нечетное. Как мы уже сказали, есть серьезные аргументы против того, что такое доказательство могло послужить Феодору основой.

[29] Pl. Men. 82b–85b; пер. Ошеров 1990: 588–95.

Раб пытается удвоить по площади квадрат со стороной длиной в два фута; этот квадрат по площади четырехфутовый (маленький квадратик в углу фигуры слева). Вопрос Сократ формулирует так (83c): «Из каких же сторон получается восьмифутовый квадрат?». В процессе, как показано на рис. 3, оказывается, что квадрат из четырехфутовых сторон — это неправильный ответ (левое изображение) и что (84e) «не получился у нас из трехфутовых сторон восьмифутовый квадрат» (среднее изображение). Но когда построена конструкция, изображенная фигурой справа, звучит вопрос: (85b) «А из каких сторон... получился у нас восьмифутовый квадрат»? Сократ отвечает за раба: «Люди ученые называют такую линию диагональю».

Следовательно, искомый квадрат существует, но он «неуловим». В левой части рис. 3 он скрывается между средним и маленьким (изначальным) квадратом. Заметим, что всю демонстрацию легко переложить в псефическую систему.

Чтобы с помощью такого метода показать, что удвоение площади невозможно для любого квадрата, а не только для случайно выбранного четырехфутового, по словам Лучича, достаточно осуществить процедуру, изображенную на рис. 4.

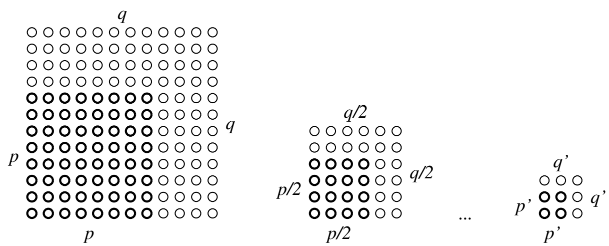

Рис. 4: Процесс обобщения размышлений из «Менона» средствами псефической арифметики (Lučić 2015b: 2.7).

Квадрат делится пополам (тем самым сохраняя пропорции) до тех пор, пока не получается ситуация из «Менона».

Процедура беспрепятственно вписывается в рамки двухмерной псефической арифметики. Она, в отличие от «традиционного доказательства по четному и нечетному» и «доказательства по единственной факторизации», не требует ничего, кроме основ обращения с четными и нечетными числами с помощью псефов. Лучич такое доказательство называет «раннепифагорейским»[30].

Если это так, то можно предположить, что Феодор пытался использовать древний метод и для увеличения больше, чем в 2 раза. Как полагает Лучич, лекция Феодора могла исходить из такого же вопроса, как тот, что Сократ задал рабу, но Феодор пытался его обобщить. Процитируем еще раз слова Теэтета (Tht. 147d):

> Присутствующий здесь Феодор чертил (ἔγραφε) нам что-то о квадратных корнях (περὶ δυνάμεων), показывая, что стороны квадратов, содержащих три (τρίποδος) и пять квадратных футов (πεντέποδος), несоизмеримы со стороной одного квадратного фута. Он выбирал один за другим квадраты вплоть до семнадцатифутового (ἑπτακαιδεκάποδος), а на нем остановился.

Реконструкция Лучича движется следующим образом. Говоря современным языком, в «Меноне» показано, что нет таких рациональных p и q, где $p^2 = 2q^2$. Феодор же решил найти, есть ли такое k, где $p^2 = kq^2$. С учетом статуса арифметики четного и нечетного в его время, он проверял два случая: существуют ли такие четные k; существуют ли такие нечетные k.

В первом случае наглядно демонстрируется, что у нас получается только вариант простого «менононовского» доказательства. Другими словами, случаи с увеличением площади в 6 и 10, например, раз простыми псефическими операциями превращаются в случай с 3 и 5 соответственно.

Во втором случае, если k нечетное, Феодор знал, что либо и p, и q четные, либо оба нечетные. Для этого требуется элементарное знание о четности произведения четных и нечетных чисел.

[30] Lučić 2015a: 29. Более того, Лучич реабилитирует идею, что доказательство несоизмеримости могло принадлежать самому Пифагору (Lučić 2015a: 30): за это его простота, а также тот факт, что основные постулаты теории четного и нечетного наверняка предшествуют Гиппасу, и разумней предположить, что первооткрывателем был скорее сам Пифагор, чем некая неизвестная нам личность. В связи с этим см. также Жмудь 2012: 227.

Если они оба четные, тогда процесс упрощается, как в предыдущем случае, пока не дойдет до состояния, как в «Меноне», или пока не превратится в случай с нечетным увеличением. И в этом последнем случае, с увеличением площади в нечетное число раз, найдется ответ.

В современной записи этот случай выглядит следующим образом: $(2a+1)^2 = k(2b+1)^2$. В псефической арифметике квадрат нечетного числа[31] выглядел, как на рис. 5.

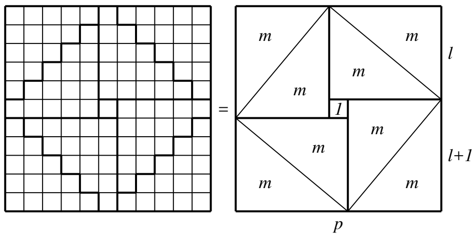

Рис. 5: Квадрат нечетного числа: 8 треугольных чисел и единичный элемент (Lučić 2015b: 12.7).

Заметим, что он состоит из 8 одинаковых треугольных чисел и одного элемента в середине; это квадратный вариант определения нечетного числа как такового (вспомним фр. 23 Аристоксена, в котором нечетное число имеет «середину»[32]). Итак, квадрат нечетного числа надо увеличить в k раз. Что могло означать действие Феодора, когда тот «чертил что-то о квадратных [корнях]»? Если надо увеличить такое число в несколько раз, тогда

[31] Knorr 1975: 175; Itard 1961: 35.

[32] Aristox. fr. 23 = DK 58 B 2: «Четными числами называются те, что делятся на равные части, нечетными — те, что на неравные и имеют середину. Поэтому считается, что по нечетным дням происходят кризисы болезней и перемены, связанные с началом [болезни], кульминацией и выздоровлением, так как нечетное число имеет начало, середину и конец» (пер. Лебедева). Ср. и перевод Жмудя (Жмудь 2012: 226, 390). Как предлагал Бернет (Burnet 1948: 288–9), четные числа неограниченные, потому что у них нет лимита на разделение на две половины (..|..), в то время как у четных есть предел, т.е. они могут делиться только на неравные части (..|...).

увеличение должно ровно распределяться на все элементы, т.е. на 8 треугольных чисел плюс на единичный элемент в центре.

Чтобы получить новый квадрат (и чтобы результат остался нечетным квадратным числом), надо его вновь свести к формуле $(2x+1)^2$, т.е. сделать так, чтобы в центре опять остался только один элемент, а около него 8 треугольных чисел. Это означает, что количество камешков из увеличенного центра, уменьшенное на 1, нужно поровну распределить на 8 частей. Значит, если мы хотим, чтобы можно было увеличить изначальный квадрат в k раз и сохранить соизмеримость сторон большого квадрата со стороной изначального, тогда мы должны увеличивать только в такое число раз, которое можно выразить в формуле $8n+1$.

Важность формулы $8n+1$ первым понял Итар[33]. Следующий шаг, который Конвей и Шипман считают отдельным типом доказательства, совершили Башмакова и Лапин: они соединили открытие Итара с «традиционным доказательством по четному и нечетному», показав, что Феодор не мог доказать случай 17 простым методом четное-нечетное[34]. Однако, как отмечает Лучич, они пользуются такой же аргументацией, как и в случае с «традиционным доказательством с помощью четного и нечетного». А это означает, что и доказательство Башмаковой и Лапина не является реконструкцией доказательства Феодора.

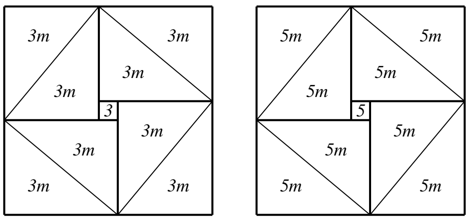

Рис. 6: Реконструкция трех- и пятикратного увеличения квадрата из лекции Феодора (Lučić 2015b: 12.7).

[33] Itard 1961: 33–9. Нерр идеи Итара назвал «гениальными», поскольку они дают на редкость серьезное объяснение случая с 17 (Knorr 1975: 113–14).

[34] Башмакова, Лапин 1986: 10.

В реконструкции Лучича, когда Феодор, по словам Теэтета, «выбирал один за другим квадраты», он сразу отбрасывал случай трехкратного и пятикратного увеличения (рис. 6), и это легко показать на чертежах с помощью псефов.

В обоих случаях количество новых элементов невозможно распределить на 8 частей, и рисунок это наглядно показывает. В первом случае на 8 треугольных чисел надо распределить остаток из 2 камешков; во втором остаток из 4. Поэтому «не существуют нечетные p и q, где $q^2 = 3p^2$» или $q^2 = 5p^2$ [35], т.е. трехкратный и пятикратный по площади квадраты «неуловимы», как и двухкратный квадрат раба Менона. То же самое произошло и когда Феодор рисовал соответствующие квадраты с фактором увеличения 7 (6 не делится на 8 частей) и т.д.

Вернемся к вопросу: почему он остановился на 17? Первое увеличение в $8n + 1$ раз, с которым должен был встретиться Феодор, было, конечно, 9. Это первое увеличение, которое дает нам *возможность* найти увеличенный квадрат, сторона которого соизмерима со стороной единичного квадрата. Феодор показал примерно то, что изображено на рис. 7.

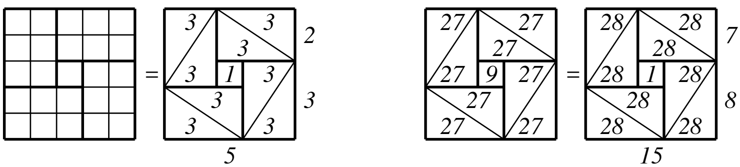

Рис. 7: Реконструкция девятикратного увеличения квадрата из лекции Феодора (Lučić 2015b: 12.7).

Решение появилось сразу, уже с $n = 1$. Если левый квадрат (наименьший, который наглядно демонстрирует квадрат нечетного числа, состоявший из 8 треугольных троек и одной единицы в центре) увеличиваем в 9 раз, получаем 8 элементов из $3 \cdot 9 = 27$

[35] Lučić 2015b: 12.7.

камешков и 9 в середине. Теперь делаем квадрат нечетного числа: 8 элементов излишка из центра распределяем на 8 частей: получается 8 раз 28, а 28 — треугольное число ($1 + 2 + \ldots + 7 = 28$). В середине остался один камешек. Сторона нового квадрата — 15: $(8 \cdot 28 + 1) = 225 = 15^2$. Таким образом, сторона «девятифутового квадрата» (квадрата с площадью в 9 футов) соизмерима со стороной «однофутового квадрата». Похожее действие будет и для $n = 3, 6, 10, 15$ и т.д.

Однако, когда Феодор дошел до следующего увеличения в $8n + 1$ раз, т.е. до 17, он столкнулся с ситуацией, в которой просто *не мог* найти n, с помощью которого можно измерить сторону большого квадрата.

Другими словами, заключает Лучич, Феодор не мог ответить на вопрос о том, соизмеримы ли сторона квадрата в 17 футов со стороной квадрата в 1 фут, пользуясь средствами доступной ему арифметики.

Это означает, что Феодор остановился не потому, что доказал, что «корень из 17 иррационален», и дальше не сумел. Он остановился потому, что не мог ни наглядно увеличить квадрат в 17 раз, ни наглядно продемонстрировать, что это невозможно[36].

Теперь мы должны рассмотреть последнюю часть свидетельства Теэтета. Он говорил, что Феодор показывал, что «стороны квадратов, содержащих три (τρίποδος) и пять квадратных футов (πεντέποδος), несоизмеримы со стороной одного квадратного фута». Критик реконструкции Лучича может задать вопрос (3) из перечисленных нами в начале статьи: если это толкование лекции Феодора правдоподобное, почему тогда Теэтет говорит о *несоизмеримости сторон*? Другими словами, как от демонстрации Феодора (и ее невозможности в случае 17) происходит переход к

---

[36] По всей видимости, ближе всех к этому приблизился Итар (Itard 1961: 36): «Peut-être faudrait-il entendre le passage du Théètète comme exprimant justement cette difficulté. La vieille arithmétique du pair et de l'impair bute sur le premier obstacle $\sqrt{17}$, 17 étant ainsi le plus petit nombre, le *pythmen* des cas qu'elle n'arrive pas à réduire». Однако «тестирование» квадратов нечетных чисел он сводит к методу «четное-нечетное».

утверждению о несоизмеримости *сторон* соответствующих квадратов?[37]

Здесь надо иметь в виду, что Платон приводит слова Теэтета, а не слова самого Феодора. Как говорил сам Теэтет, ему «число корней показалось бесконечным», и они попытались «объединить их все под одним именем». Это означает, что ученик последних пифагорейцев перевел арифметику на новый уровень[38]. Учитель Теэтета, Феодор, сделал максимально возможное в старой парадигме, арифметике камешков, которая опиралась на знания о четном-нечетном и рассуждения, подобные описанным в «Меноне». В этой парадигме он задавал только старый «меноновский» вопрос об увеличении площади квадрата и в своей лекции поставил точку одной эпохи — эпохи арифметики камешков. Из реконструкции Лучича следует, что только Теэтет мог задать универсальный вопрос об отношениях диагонали и сторон так, как мы это делаем сегодня[39]. Для того, чтобы он задал такой вопрос, ему требовалась новая идея числа.

[37] Такое замечание сделал бы, пожалуй, ван дер Варден: выражение («commensurable in length») применимо только к отрезкам длин, и из древней арифметики Феодор мог почерпнуть лишь идею о попеременном вычитании; на 17 Феодор остановился в силу сложности самого процесса вычитания (van der Waerden 1961: 142). На взгляд Норра, в рамках любой «чисто арифметической реконструкции» невозможно ответить на упомянутую критику (Knorr 1975: 114).

[38] Это не единственный случай, когда Теэтет воздвиг на высший уровень абстракции какой-то древний математический вопрос: ему приписывается обобщенная теория правильных полиэдров: «В этой, т.е. 13-й книге, описываются так называемые 5 платоновских фигур, которые, однако, Платону не принадлежат. Три из упомянутых фигур — куб, пирамида и додекаэдр — принадлежат пифагорейцам, а октаэдр и икосаэдр — Теэтету. По имени Платона они были названы потому, что он упоминает о них в *Тимее*» (Лебедев 44 A 15a = Sch. ad Euc. XIII.1; ср. Жмудь 2012: 228 прим. 87. Утверждение повторяется в «Суде»: ср. Heath 1956: 1.413). Как и в случае несоизмеримых величин, первопроходцем в исследовании был, наверное, Гиппас (анализ свидетельств Климента, Ямвлиха и Паппа, ведущих к Гиппасу, см., напр., Жмудь 2012: 238), который занимался додекаэдром. Как заключает Жмудь, Гиппас не занимался теорией правильных тел как таковой; Теэтет же, поставив вопрос о том, какие из правильных тел вообще можно построить, вскоре открыл октаэдр (Жмудь 2012: 242–3).

[39] Lučić 2015b: xiii.

Ответ на критику будет следующий: если величины несоизмеримы, то их можно представить только «геометрически» (как это делается и в «Меноне», и в реконструированном «раннепифагорейском доказательстве»), как их и определяет сам Евклид. Однако само геометрическое представление не дает наглядности доказательства несоизмеримости, потому что процесс демонстрации никогда не заканчивается; поэтому даже в конце IV века Евклид таким действием никогда не пользуется ни в каких целях, хотя он с ним и знаком[40].

Если мы согласны, что демонстрацию несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны (а тем самым, и $\sqrt{2}$) надо отнести к поколению Гиппаса, тогда сложно переоценить гениальность Феодора, который век спустя сумел эту демонстрацию расширить. Сложность процедуры в рамках псефической арифметики наглядно показывает, почему понадобилось так много времени.

Вывод о том, что Феодор в своей лекции на самом деле занимался арифметикой, является и косвенным подтверждением позиции сторонников его принадлежности к раннепифагорейскому движению, поскольку в V в. до н.э. ранним пифагорейцам принадлежала практическая монополия на исследования в этой области[41].

---

[40] Ср. Herz-Fischler 1998: 48: «arrangements of dots — corresponding to integers — led to purely geometrical statements that Euclid presents».

[41] Как отмечает Жмудь 2012: 243, «все известные нам математики V–IV вв. были пифагорейцами, либо их учениками (как Теэтет и Евдокс). Более того, в вышеупомянутом фрагменте 23 Аристоксен считал Пифагора основателем теоретической науки о числах».

Источники и переводы

DK — Die Fragmente der Vorsokratiker / Griechisch und Deutsch von H. Diels; 6. Aufl. hrsg. von W. Kranz. Bde. 1–3. Berlin: Weidmann, 1951–1952[6].

Euc. — Euclidis Elementa / edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg. T. I–V. Lipsiae: in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1888.

Васильева 1993 — Платон. Теэтет / Пер. Т.В. Васильевой, заново сверенный И.И. Маханьковым // Платон. Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 2. М.: «Мысль», 1993. С. 192–274.

Лебедев 1989 — Фрагменты ранних греческих философов. Часть I: От эпических теокосмогоний до возникновения атомистики / Издание подготовил А.В. Лебедев. М.: «Наука», 1989.

МБВ 1949 — Начала Евклида. Книги VII–X / Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И.Н. Веселовского. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.

Ошеров 1990 — Платон. Менон / Пер. С.А. Ошерова // Платон. Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 1. М.: «Мысль», 1990. С. 575–612.

Фохт 1978 — Аристотель. Первая аналитика / Пер. Б.А. Фохта // Аристотель. Сочинения в 4-х томах. Т. 2. М.: «Мысль», 1978. С. 117–254.

Heath 1956 — The Thirteen Books of Euclid's Elements / Translated from the Text of Heiberg with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath. Vols. 1–3. New York: Dover Pubs., 1956 [= Cambridge UP, 1925[2]].

Fowler 1921 — Plato. Theaetetus / English translation by H.N. Fowler // Plato in Twelve Volumes. Vol. 7. London: William Heinemann, etc., 1921. P. 1–257. (Loeb Classical Library 123.)

Литература

Башмакова, Лапин 1986 — *Башмакова И.Г., Лапин А.И.* Пифагор // Квант. № 1 (1986). С. 7–12.

Жмудь 2012 — *Жмудь Л.Я.* Пифагор и ранние пифагорейцы. М.: Университет Дмитрия Пожарского, 2012.

Becker 1936 — *Becker O.* Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der euklidischen Elemente // Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abt. B: Studien / hrsg. von O. Neugebauer, J. Stenzel, O. Toeplitz. Bd. 3. Berlin: J. Springer, 1936. S. 533–553.

Burkert 1972 — *Burkert W.* Lore and Science in Ancient Pythagoreanism. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1972.

Burnet 1948 — *Burnet J.* Early Greek Philosophy. London, 1948[4].

Conway, Shipman 2013 — *Conway H., Shipman J.* Extreme Proofs I: The Irrationality of √2 // The Mathematical Intelligencer 35.3 (2013). P. 2–7.

von Fritz 1945 — *Fritz K., von.* The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum // Annals of Mathematics 46 (1945). P. 242–264.

Heath 1981 — *Heath T.L.* A History of Greek Mathematics. Vol. 1–2. New York: Dover Pubs., 1981.

Heller 1958 — *Heller S.* Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer // Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik 6 (1958). S. 5–28.

Herz-Fischler 1998 — *Herz-Fischler R.* A Mathematical History of the Golden Number. Mineola, NY: Dover Pub., 1998.

Huffman 2005 — *Huffman C.A.* Archytas of Tarentum: Pythagorean, Philosopher and Mathematician King. Cambridge UP, 2005.

Itard 1961 — *Itard J.* Livres arithmétiques d'Euclide. Paris: Hermann, 1961.

Knorr 1975 — *Knorr W.* The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry. Dodrecht: Reidel, 1975.

Lučić 2015a — *Lučić Z.* Irrationality of the Square Root of 2: The Early Pythagorean Proof, Theodorus's and Theaetetus's Generalizations // The Mathematical Intelligencer 37 (2015). P. 26–32.

Lučić 2015b — *Lučić Z.* Pitagorejska aritmetika [неопубликованная рукопись, из частной переписки].

Netz 2014 — *Netz R.* The problem of Pythagorean mathematics // A History of Pythagoreanism / Ed. by C.A. Huffman. Cambridge UP, 2014. P. 167–184.

Philip 1966 — *Philip J.A.* Pythagoras and early Pythagoreanism. Toronto: University of Toronto Press, 1966.

van der Waerden 1961 — *Waerden B.L., van der* Science Awakening / English translation by Arnold Dresden, with additions of the author. N.Y.: Oxford UP, 1961[2].